10. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

   (a)
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}[1 + (-1)^{n-1}(2n+1)].$$

   (b)
$$n! \geq 2^{n-1}.$$

11. Bestimmen Sie, für $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{k} - \frac{k}{k+1} \right)$$
Formulieren einen Beweis auch ohne vollständige Induktion.

12. Sei F_n die n-te Fibonacci Zahl. Zur Erinnerung: die Fibonacci Zahlen sind definiert durch die Rekursion $F_1 = F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 3$.

   (a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$
$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$, definiere die Gnocci Zahlen G_n durch folgende Rekursion:
$$G_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$
Berechnen sie G_1 und zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt
$$G_n = \frac{1}{1 + G_{n-1}}.$$

13. Wir wollen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ konstruieren. Dazu definieren wir auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation $\sim$ wie folgt
$$(a,b) \sim (c,d) \iff a + d = c + b.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

   (b) Wir bezeichnen mit $[(a,b)]_\sim$ die (eindeutige) Äquivalenzklasse, die das Element (a,b) enthält. Definieren Sie eine (wohldefinierte) Addition "+" auf der Menge der Äquivalenzklassen, die mit der "bekannten" Addition auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt, wenn folgende Interpretation zugrunde gelegt wird.
$$[(a,b)]_\sim \widehat{=} \begin{cases} 0 & \text{falls } a = b \\ a - b & \text{falls } a > b \\ -(b-a) & \text{falls } a < b \end{cases}$$
D.h. die Klasse $[(5,5)]_\sim$ entspricht dem Symbol 0, die Klasse $[(6,3)]_\sim$ entspricht dem Symbol 3, die Klasse $[(2,4)]_\sim$ entspricht dem Symbol -2 und so weiter.

14. Sei $1 < p \in \mathbb{N}$ eine Zahl. Nun definieren wir eine Relation auf $\mathbb{Z}$ durch
$$n \sim m \quad \Leftrightarrow \quad n - m \text{ ist durch } p \text{ teilbar.}$$

   a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?